

Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

1.12.2011

Úlohy na cvičení

G1 Uvěřte v platnost následujících rovností a zapamatujte si je.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

G2 Spočtěte následující limity. Využívejte k výpočtu věty z přednášky a limity z úlohy **G1**.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 3} \quad & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x+2} - \sqrt{6x}} \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sin x}{e^x} \quad & f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(5x^2 - 5)}{x - 1} \quad g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{x+1}}{x} \end{aligned}$$

G3 Ukažte, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

G4 Vyšetřete konvergenci následujících řad.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos \frac{1}{n}\right).$$

Úlohy na doma

H1 Spočtěte a odůvodněte, kde používáte nějakou větu.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{5x+2} - \sqrt{6x})^2}$$

H2 Spočtěte a odůvodněte svůj výpočet všude, kde používáte nějakou větu. Základní limity z **G1** a **G3** používejte bez důkazu.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

H3 Vyšetřete konvergenci řady. Opět používejte základní limity bez důkazu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right).$$